Eléments de correction du DST1 du premier trimestre

Tous les résultats devront être clairement justifiés, sauf précision contraire.

Exercice 1 (5 points) Formes canoniques et factorisation

On applique le travail technique et de rédaction vu en cours. On obtient les résultats suivants :

1. $p(x) = 5x^2 - 3x - 2 = 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{49}{20} = 5(x-1)\left(x + \frac{2}{5}\right)$
2. $q(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{9}$, qui n'est pas factorisable car n'admet pas de valeur d'annulation.

Exercice 2 (6 points) Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{16}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Partie A :

1. f est une fonction polynôme du second degré et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une parabole (programme de 2nd).
2. Sans justifier (programme de 2nd), on dresse le tableau de variations de f...
3. Sans justifier (programme de 2nd), on détermine l'équation de la droite (d), axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.C'est à dire : $x = -\frac{5}{2}$.

Partie B :

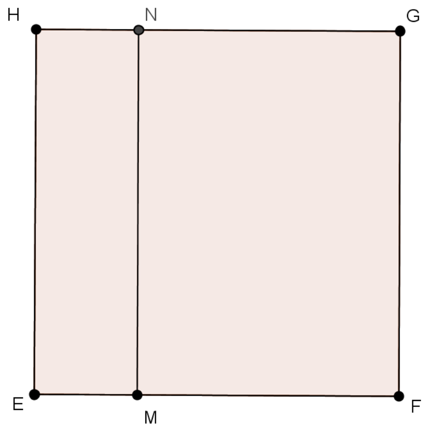
1. Développer et réduire, c'est rédiger un peu de technique pour obtenir $f(x) = x^2 + 5x + \frac{91}{16}$.
2. Factoriser, c'est utiliser la forme de l'énoncé ("canonique") pour obtenir $f(x) = \left(x + \frac{7}{4}\right)\left(x + \frac{13}{4}\right)$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée à chaque fois :
   (a) Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$, on utilise la forme canonique. D'où $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{16} = 0$ puis après factorisation (identité remarquable) $x = -\frac{5}{4}$ ou $x = -\frac{15}{4}$.
   On interprète ces solutions comme étant les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe d'équation $y = 1$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, on utilise la forme factorisée. On obtient facilement $x = -\frac{7}{4}$ ou $x = -\frac{13}{4}$.
   On interprète ces solutions comme étant les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe d'équation $y = 0$ ou axe des abscisses.
   (c) A partir de la forme développée, $f(0) = \frac{91}{16}$.
   La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{91}{16}\right)$.
4. Le point $A(\sqrt{2}\,; 14,75)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe $\mathcal{C}_f$; autrement dit si on peut établir que $f(\sqrt{2}) = 14,75$.
   Or d'après la calculatrice : $f(\sqrt{2}) \approx 14,7586$.
   Le point A n'appartient donc pas à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 (5 points) Résolutions en vrac

1. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3}{3-4x} \geqslant -2$.
   Il s'agit d'un travail classique respectant les étapes suivantes :
   (a) Recherche de la valeur interdite, ici $\dfrac{3}{4}$ qui est la valeur d'annulation du dénominateur.
   (b) Travail technique pour ramener l'inéquation à : $\dfrac{9-8x}{3-4x} \geqslant 0$
   (c) Tableau de signe de chaque facteur du quotient...
   (d) Conclusion : les solutions de l'inéquation proposées sont dans l'union d'intervalles :
   $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[\cup \left[\dfrac{9}{8}\ ;\ +\infty\right[$
2. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x-5)^2 - (2x+3)(x-5) = 0$.
   Il s'agit d'un travail classique respectant les étapes suivantes :
   (a) Factoriser l'expression par le facteur $(x-5)$
   (b) Résoudre l'inéquation produit obtenue
   (c) Conclusion : les solutions de l'équation proposée sont 5 et -8

Exercice 4 (4 points) Algogo

EFGH est un carré et M est un point qui se déplace sur le segment [EF]. Le point N est le point du segment [GH] tel que (MN)//(EH).
On pose EM=x, x décrivant l'intervalle $[0\,;6]$.



On note $V(x)$ l'aire du rectangle EMNH et $R(x)$ l'aire du rectangle ~~MFGH~~ .

`Une petite correction était nécessaire pour que la figure soit un rectangle.`
`Il s'agissait effectivement de MFGN et pas MFGH !`

1. Le rectangle EMNH a un côté qui fait 6 comme le carré le contenant et un côté qui fait x. L'expression de $V(x)$ est $V(x) = 6x$.
   On procède de même pour MFGN, $R(x) = 36 - 6x$, c'est à dire l'aire totale du carré privée de l'aire du rectangle EMNH.
2. On donne un algorithme :

```
Variables : V et R sont des réels positifs
            K est un entier naturel

pour K allant de 0 à 6 faire
    V prend la valeur 6K
    R prend la valeur 36 − V
    Afficher V et R
fin
```

On fait fonctionner l'algorithme à la main et on obtient le tableau que l'on prend soin de compléter ! :

	K	V	R
Fin de la 1ère itération	0	0	36
Fin de la 2e itération	1	6	30
Fin de la 3e itération	2	12	24
Fin de la 4e itération	3	18	18
Fin de la 5e itération	4	24	12
Fin de la 6e itération	5	30	6
Fin de la 7e itération	6	36	0

3. Cet algorithme calcule les aires respectives des rectangles EMNH et MFGN, lorsque EM=x prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
4. On programme cet algorithme sur la calculatrice, pour K variant de 0 à 100. Après avoir fait tourner ce programme, on obtient ce qui est affiché ci-dessous :