Lycée Saint-Charles.

DST DE MATHÉMATIQUES

Première Spécialité mathématiques

INFORMATIONS

Date :	Lundi 9 mars 2020
Durée :	2 heures 30 minutes (sortie autorisée : 2 heures)
Calculatrice :	autorisée en mode examen.

CLASSE

$1^{\text{ère}}$ 4 (39 élèves) **Professeur :** E. Pons

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf en cas de précision contraire de l'énoncé.
Le barème est sur 20 points (+2 points bonus).

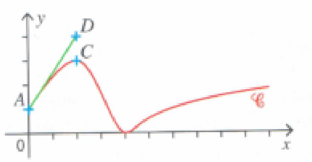
Exercice 1 (8 points) - Un jeu presque équitable -

Un sac contient 38 jetons de couleur rouge ou verte. On note n le nombre de jetons rouges.

1. Sachant qu'il y a dans le sac au moins un jeton de chaque couleur, quelles sont les valeurs possibles du nombre n ?
2. **Jeu A :** on extrait au hasard, deux fois de suite avec remise, un jeton dans le sac.
   (a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Déterminer en fonction du nombre n la probabilité d'extraire deux jetons rouges.
   (c) On note p_2 la probabilité d'extraire deux jetons de la même couleur.
   Montrer que $p_2 = \dfrac{2n^2 - 76n + 1\,444}{1\,444}$.
   (d) Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p_2 = 0,5$?
3. **Jeu B :** on extrait au hasard, trois fois de suite avec remise, un jeton dans le sac.
   (a) Compléter l'arbre pondéré précédent pour décrire la nouvelle situation.
   (b) On note p_3 la probabilité d'extraire trois jetons de la même couleur.
   Montrer que $p_3 = \dfrac{3n^2 - 114n + 1\,444}{1\,444}$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[\ 1\ ;\ 37\ ]$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 114x + 1\,444}{1\,444}$.
   (C'est à dire : justifier la dérivabilité, calculer la dérivée, étudier son signe,...)
   (d) En déduire la valeur minimale de p_3 et interpréter cette valeur dans le contexte du jeu B.
   (e) Combien doit-il y avoir de jetons rouges dans le sac pour que p_3 soit la plus proche possible de $0,5$?
4. **Jeu C :** on extrait au hasard, quatre fois de suite avec remise, un jeton dans le sac.
   On note p_4 la probabilité d'extraire quatre jetons de la même couleur.
   Combien doit-il y avoir de jetons rouges dans le sac pour que p_4 soit la plus proche possible de $0,5$?

Exercice 2 (3 points) - Les Bazzzz...euheuh -

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ dont on donne la représentation graphique.



Les coordonnées des points indiqués sont $A(\ 0;\ 1\ )$, $D(\ 2;\ 4\ )$, $C(\ 2;\ 3\ )$.
La droite (AD) est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La courbe rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.
On sait aussi que $f(6) = 1$ et que la tangente au point d'abscisse 6 passe par le point $E(\ 3;\ 0\ )$.

Par lecture graphique :

1. Déterminer $f(0), f'(0) et f'(6)$..
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6.
3. Dresser le tableau de signes de f'

Exercice 3 (5 points) - La planète Mercurne -

1. Soient A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.
   (a) Justifier la relation $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$.
   Quelle autre égalité obtient-on en échangeant les rôles de A et B dans cette relation ?
   (b) En déduire que $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$. *On pourra utiliser un diagramme*
2. Sur la planète Mercurne, 99 % des créatures sont riches ou généreuses et il y a autant de créatures riches que de créatures généreuses. De plus, chez les créatures de cette planète, les caractères "riches" et "généreux" sont indépendants et non apparents. On rencontre une créature de cette planète et on note respectivement R et G les événements "cette créature est riche" et "cette créature est généreuse". On pose $x = P(G)$.
   (a) Montrer que x vérifie : $x^2 - 2x + 0,99 = 0$.
   (b) Quelle est la probabilité que cette créature soit riche et généreuse ? Justifier.

Exercice 4 (4 points) - Encore un peu de fonctions -

Soit f la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x+4}$.

1. Montrer que pour tout $x > -4$, la dérivée de f vérifie : $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+4)^2}$.
2. Pour tout $x > -4$, on pose $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$.
   Montrer que la fonction g admet un minimum sur $]-4\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que f est monotone sur $]-4\ ;\ +\infty[$.

Exercice 5 (*hors barème* , 2 points) - Algorithmique -

L'algorithme suivant simule une expérience aléatoire.

```
n ← un nombre entier aléatoire entre 1 et 12
Si n ⩾ 5 alors a ← "réalisé"
Sinon a ← "non réalisé"
Fin Si
Si n ⩽ 9 alors b ← "réalisé"
Sinon b ← "non réalisé"
Fin Si
```

On exécute cet algorithme.
On note A l'événement «a contient "réalisé"» et B l'événement «b contient "réalisé"».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?