SAINT SULPICE
COLLÈGE & LYCÉE - PARIS VI

DTL DE MATHÉMATIQUES
Nom du professeur : PONS
Classe : 1^{ere} SPE

Date du DTL : mercredi 05 avril 2023
Durée de l'épreuve : 1h30 + 30mins (1/3 temps).

Matériel autorisé	Calculatrice, en mode examen
Consignes particulières	Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte, sauf précision contraire de l'énoncé.

barème sur 20 points

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de la page **1 sur 4** à la page **4 sur 4**.

L'usage de toute calculatrice, en mode examen, est autorisé.

Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

Le candidat peut les traiter dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1	7 points
Exercice 2	8 points
Exercice 3	5 points

L'évaluation prend en compte la clarté et la précision des raisonnements ainsi que, plus largement, la qualité de la rédaction. Elle prend en compte les essais et les démarches engagées, même non abouties.

Exercice 1 (7 POINTS)

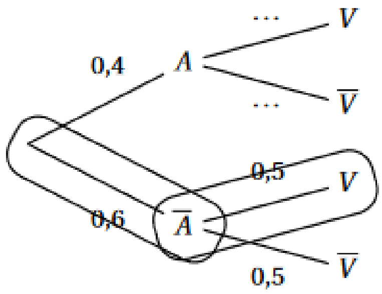
Ci-dessous est proposée la correction que l'on trouve sur le site de l'APMEP :

1. De l'énoncé on déduit que :

- $P(A) = 0,4$;
- $P_{\overline{A}}(V) = 0,5$;
- $P(A \cap V) = 0,12$.

On a donc $P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,4} = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.

2. On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(A \cap V) + P\left(\overline{A} \cap V\right)$.

Or $P\left(\overline{A} \cap V\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(V) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$. (branches encadrées)

Donc $P(V) = 0,12 + 0,30 = 0,42$.

3. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.

On a $P_{\overline{V}}(A) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap A\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{P\left(A \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)}$.

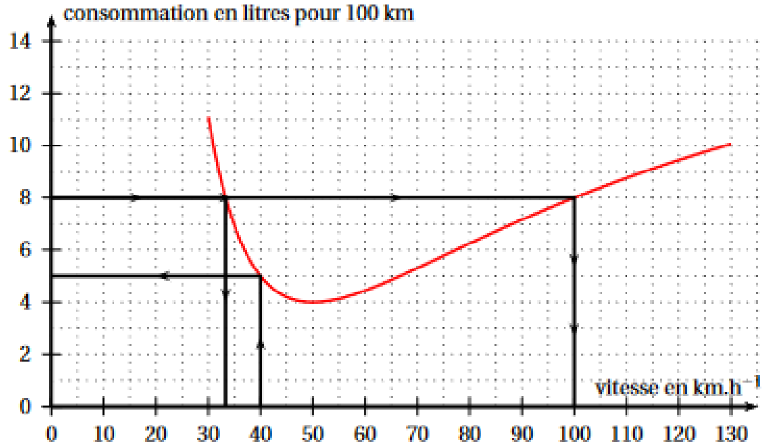
Or d'après la question précédente : $P\left(\overline{V}\right) = 1 - P(V) = 1 - 0,42 = 0,58$ et d'après la question 1 : $P_A\left(\overline{V}\right) = 1 - P_A(V) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Donc $P_{\overline{V}}(A) = \dfrac{0,4 \times 0,7}{0,58} = \dfrac{0,28}{0,58} = \dfrac{28}{58} = \dfrac{14}{29} \approx 0,482$, soit 0,48 au centième près..

4. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ?
On a vu que $P\left(\overline{V}\right) = 1 - 0,42 = 0,58$.
La probabilité cherchée est donc égale à $0,58 \times 0,58 = 0,3364$.

Exercice 2 (8 points)

Ci-dessous est proposée la correction que l'on trouve sur le site de l'APMEP :



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?
   On lit environ 5 l.
2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?
   On lit environ 33,3 km/h ou 100 km/h.
3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?
   La consommation semble la plus basse à une vitesse de 50 km/h.

Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1}, avec $30 \leqslant x \leqslant 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40000}{x^2}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30 ; 130]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [30 ; 130]$,

$$f'(x) = \frac{800(2x - 100)}{x^3}.$$

   u et v étant deux fonctions dérivables et la dérivée de $\frac{u}{v}$ (pour $(v \neq 0)$ étant $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, on a donc :
   $f'(x) = \dfrac{x^2 \times (40x - 1600) - 2x\left(20x^2 - 1600x + 40000\right)}{x^4} = \dfrac{40x^3 - 1600x^2 - 40x^3 + 3200x^2 - 80000x}{x^4} = \dfrac{1600x^2 - 80000x}{x^4} = \dfrac{800(2x - 100)}{x^3}$.

5. Démontrer la conjoncture de la question 3.
   On a $800 > 0$ et on a aussi $x^2 > 0$ quel que soit le réel x, donc le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $2x - 100$. Or :

   - $2x - 100 < 0 \iff 2x < 100 \iff x < 50$;
   - $2x - 100 > 0 \iff 2x > 100 \iff x > 50$;
   - $2x - 100 = 0 \iff 2x = 100 \iff x = 50$.

   Du signe de la dérivée, on en déduit que f est décroissante pour $x < 50$ et croissante pour $x > 50$: $f(50) = \dfrac{20 \times 50^2 - 1600 \times 50 + 40000}{50^2} = 36 - 32 = 4$ (l) est le minimum de la fonction.

Exercice 3 (5 points)

Ci-dessous est proposée la correction que l'on trouve sur le site de l'APMEP :

1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	-1	2

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

On a sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 6x + 2 = 0$; on a $\Delta = 36 - 24 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$.

L'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-6+2\sqrt{3}}{6} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}.$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

On sait que $f'(x) \geqslant 0$, sauf sur l'intervalle $\left]\frac{-3-\sqrt{3}}{3} ; \frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$ où $f'(x) < 0$.

Donc f est croissante sauf sur l'intervalle $\left]\frac{-3+\sqrt{3}}{3} ; \frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$ où elle est décroissante.

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$1+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	

4. Le point S$(-4 ; -3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?

Équation de la tangente au point $(-2 ; f(-2))$.

On a $f(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) + 1 = -8 + 12 - 4 + 1 = 1$.

$f'(-2) = 3 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) + 2 = 2$.

La tangente (T) en S a pour équation;

$M(x ; y) \in (T) \iff y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \iff y - 1 = 2(x+2) \iff y = 2x + 4 + 1 \iff y = 2x + 5$.

Donc S$(-4 ; -3) \in (T) \iff -3 = 2 \times (-4) + 5 \iff -3 = -8 + 5$ qui est vraie.