SAINT SULPICE
COLLÈGE & LYCÉE - PARIS VI

DTL DE MATHÉMATIQUES
Nom du professeur : PONS
Classe : 2$^{\text{de}}$ F

Date du DTL : mercredi 4 novembre 2020
Durée de l'épreuve : 2 heures.

Matériel autorisé	calculatrice, dans le cadre de la règlementation en vigueur
Consignes particulières	barème sur 28 points

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte, sauf précision contraire.

EXERCICE 1 (4 POINTS) CALCULS AVEC LES FRACTIONS

Quatre enfants se partagent une tablette de chocolat. Le premier prend le tiers de la tablette et le second le quart. Le troisième prend les $\frac{2}{5}$ de ce qui reste après que le premier et le deuxième se sont servis.

1. C'est l'expression $B = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5}$ qui permet de trouver la part du troisième.
   En effet la fraction prise par les deux premiers est donnée par $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$.
   On calcule ensuite le reste en effectuant le calcul $1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$.
   Enfin on multiplie le résultat de ce dernier calcul (qui doit donc être entre parenthèse) par $\frac{2}{5}$ pour obtenir la part du troisième.

2.

$$B = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5}$$

$$B = \left(1 - \frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) \times \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{5}{12} \times \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{1}{6}$$

3. La part du quatrième s'obtient par la soustraction des parts des trois premiers.
$1-\left(\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{6}\right)=1-\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2 (4 points) Les ensembles de nombres

Recopier et compléter les pointillés par le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel appartient chaque nombre ci-dessous :

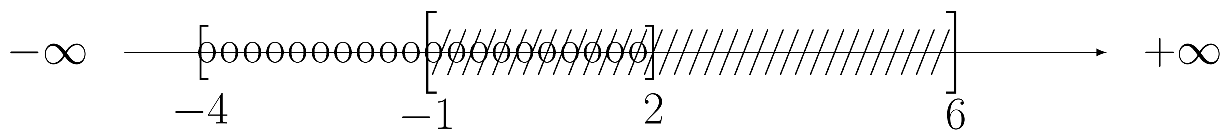
1. $7{,}141\,414 \in \mathbb{D}$
2. $0{,}333 \in \mathbb{D}$
3. $\sqrt{121} \in \mathbb{N}$
4. $-\dfrac{84}{14} \in \mathbb{Z}$
5. $-\dfrac{153}{3} \in \mathbb{Z}$
6. $\dfrac{11}{3} \in \mathbb{Q}$
7. $\dfrac{22}{11} \in \mathbb{N}$
8. $-\dfrac{25}{\sqrt{100}} \in \mathbb{D}$

Exercice 3 (4 points) Les intervalles

Dans chacun des cas, représenter les intervalles donnés I et J sur la droite graduée des nombres réels, puis exprimer sous forme d'un seul intervalle $I \cup J$ et $I \cap J$.

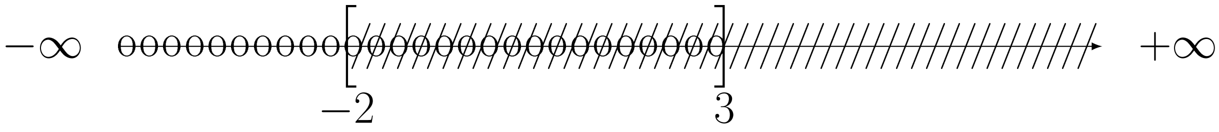
	Intervalle I	Intervalle J
cas 1	$[-4\,;\,2]$	$[-1\,;\,6]$
cas 2	$]-\infty\,;\,3]$	$[-2\,;\,+\infty[$
cas 3	$]-\infty\,;\,7]$	$]-\infty\,;\,4]$
cas 4	$[3\,;\,+\infty[$	$[-5\,;\,+\infty[$

1. **Cas 1 :**



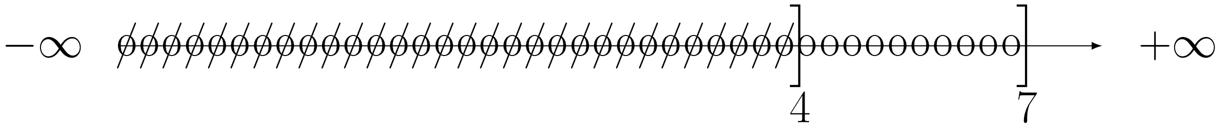
$I \cup J = [-4\,;\,6]$ et $I \cap J = [-1\,;\,2]$.

2. **Cas 2 :**



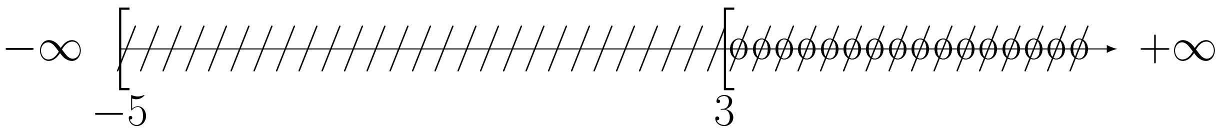
$I \cup J = \mathbb{R}$ et $I \cap J = [\,-2\,;\ 3\,]$.

3. **Cas 3 :**



$I \cup J =]\,-\infty;\ 7\,]$ et $I \cap J =]\,-\infty;\ 4\,]$.

4. **Cas 4 :**

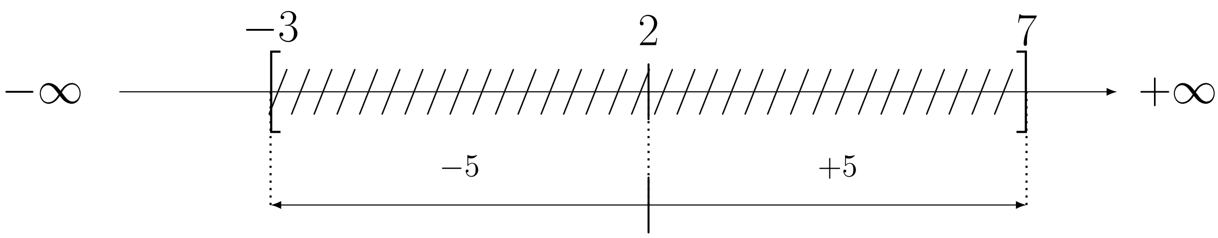


$I \cup J = [\,-5\,;\ +\infty\,[$ et $I \cap J = [\,3\,;\ +\infty\,[$.

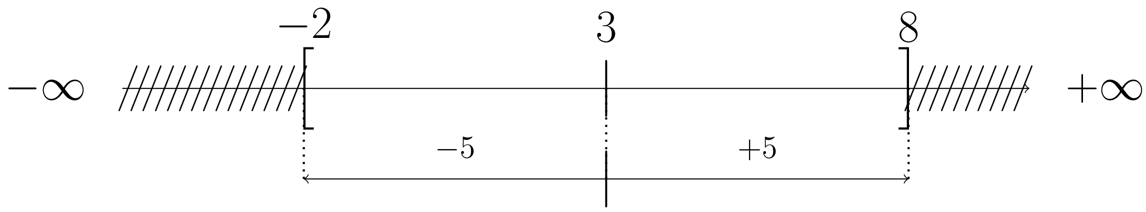
Exercice 4 (4 points) Valeur absolue

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la phrase suivante : « L'ensemble des réels x dont la distance à 2 est inférieure ou égale à 5 »
   (a) Cette phrase se traduit par l'inéquation : $|x-2| \leqslant 5$.
   (b) On construit l'ensemble des nombres dont la distance à "2" est inférieure ou égale à 5. On en déduit l'intervalle solution de cette inéquation : $I = [\,-3\,;\ 7\,]$.



2. On considère l'inéquation d'inconnue x : $|x-3| \geqslant 5$.
   (a) On traduit d'abord cette phrase mathématique par : l'ensemble des nombres x qui se trouvent à une distance supérieur à 5 de la valeur 3. On représenter ensuite sur la droite des nombres réels les solutions de cette inéquation.



   (b) A l'aide des intervalles, l'ensemble solution de cette inéquation est : $]-\infty ;\ -2\,] \cup [\,8\ ;\ +\infty\,[$.

Exercice 5 (5 points) Un peu de Python

On considère le script du programme de calcul suivant :

```
1 from math import sqrt
2 x=float(input("Entrer un nombre réel positif :"))
3 if 0<=x<1:
4     a = 1/sqrt(1-x)
5 elif x<4:
6     a=2*x-1
7 else :
8     a=(x**2-1)/7
9 print("a =",a)
```

1. La ligne 1 de ce programme sert à importer du module mathématique la fonction "sqrt" (racine carrée ou square root en anglais), *que nous avons rencontrée quelques fois lors de nos activités Python !* .
2. La ligne 2 de ce programme sert à faire une entrée au clavier ("input") et l'entrée est considérée comme un nombre de type réel ("float").
3. 2 est compris entre 1 et 4. D'après les instructions conditionnelles, on applique alors la deuxième instruction de calcul du programme.
   $a = 2 \times 2 - 1 = 3$.
   On en déduit que le plus petit ensemble auquel appartient la variable "a" lorsque l'on entre le nombre réel positif 2 est $\mathbb{N}$.

4. De même, $3\sqrt{2} > 4$ donc on utilise la troisième instruction de calcul : $a = \dfrac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{7} = \dfrac{18}{7}$.
On en déduit que le plus petit ensemble auquel appartient la variable "a" lorsque l'on entre le nombre réel positif $3\sqrt{2}$ est $\mathbb{Q}$.
5. Enfin $\dfrac{5}{9}$ est compris entre 0 et 1, donc on calcule à l'aide de la première instruction de calcul.
$a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{5}{9}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{5}{9}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{3}{2}$.
Le plus petit ensemble auquel appartient la variable "a" lorsque l'on entre le nombre réel positif $\dfrac{5}{9}$ est $\mathbb{D}$.

Exercice 6 (4 points) Algorithme en langage naturel

On considère l'algorithme en langage naturel du programme "nombre" ci-dessous, qui demande d'entrer un nombre a et qui renvoie e :

Pour cet exercice, je ne rédige pas tout comme il faudrait le faire sur un DTL. Je me contente de donner les idées importantes !

1. On recommence à faire des calculs comme à l'exercice précédent en appliquant l'algorithme proposé. On trouve pour chaque valeur de "a", la même valeur pour "e". On conclut donc que les ensembles respectifs sont $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.
2. On souhaite prouver que pour tout nombre a, on a "nombre(a)=a". On est amené à faire un peu de calcul littéral.
   (a) $c = a - b = a - a^2$.
   (b) $d = 2 \times (a - a^2)$.
   (c) $e = 2 \times (a - a^2) - (a - a^2) + a^2 = (a - a^2) + a^2 = a$.
   (d) On vient de démontrer que pour tout nombre réel a, on a $e = nombre(a) = a$; ce qui était la problématique de la question 2....en précisant que le programme proposé renvoie la valeur de "e" !

Exercice 7 (3 points) Une démonstration utile

On souhaite établir l'égalité suivante connue des Égyptiens.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}}$$

Pour cet exercice, je ne rédige pas tout comme il faudrait le faire sur un DTL. Je me contente de donner les idées importantes !

1. Tester une égalité pour 5 valeurs différentes de n, c'est :
   - Respecter le fait que n est un entier naturel !
   - Calculer la valeur du membre de droite ; calculer la valeur du membre de gauche ; PUIS CONCLURE ! ! ! qu'il y a bien égalité entre les 2 valeurs obtenues CAR CE N'EST PAS AU LECTEUR DE FAIRE LES CONCLUSIONS.
2. Prouver que cette égalité est vraie pour tout $n > 0$, c'est encore une fois appliquer des règles de calcul sur les fractions mais avec une situation de calcul littéral !
   $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n \times (n+1)} - \frac{n}{(n+1) \times n} = \frac{n+1-n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n \times (n+1)}$.
   Ce qu'il fallait démontrer.
3. **Question bonus ! ; 1 point hors barème**

   En déduire la valeur de la somme :

   $$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ... + \frac{1}{2020 \times 2021}$$

   .

   L'idée est de se servir de l'égalité qui vient d'être établie à la question 2.. On remplace chaque terme de la somme par la différence proposée dans l'égalité...et on va ensuite observer que les termes obtenus par ce procédé, s'annulent deux à deux car ils sont opposés, à l'exception du premier et du dernier, ce qui simplifie grandement le calcul à faire au final.

   Et on trouve ....! je vous laisse le plaisir d'obtenir cette différence par vous même ET ME FERAI UN PLAISIR DE VOUS LIRE !