

Date du DTL : mercredi 4 novembre 2020

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Matériel autorisé	calculatrice, dans le cadre de la réglementation en vigueur
Consignes particulières	barème sur 28 points

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte, sauf précision contraire.

EXERCICE 1 (4 POINTS) CALCULS AVEC LES FRACTIONS

Quatre enfants se partagent une tablette de chocolat. Le premier prend le tiers de la tablette et le second le quart. Le troisième prend les $\frac{2}{5}$ de ce qui reste après que le premier et le deuxième se sont servis.

1. Laquelle de ces expressions permet de trouver la part du troisième ?

Justifier.

$$A = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} ; \quad B = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5} ;$$
$$C = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \div \frac{2}{5} ; \quad D = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5} .$$

2. Effectuer, en détaillant les étapes, le calcul de l'expression choisie.
3. En déduire la part du quatrième.

EXERCICE 2 (4 POINTS) LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Recopier et compléter les pointillés par le plus petit ensemble (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} ou \mathbb{R}) auquel appartient chaque nombre ci-dessous :

1. $7,141\ 414 \in \dots$

4. $-\frac{84}{14} \in \dots$

7. $\frac{22}{11} \in \dots$

2. $0,333 \in \dots$

5. $-\frac{153}{3} \in \dots$

8. $-\frac{25}{\sqrt{100}} \in \dots$

3. $\sqrt{121} \in \dots$

6. $\frac{11}{3} \in \dots$

EXERCICE 3 (4 POINTS) LES INTERVALLES

Dans chacun des cas, représenter les intervalles donnés I et J sur la droite graduée des nombres réels, puis exprimer sous forme d'un seul intervalle $I \cup J$ et $I \cap J$.

	Intervalle I	Intervalle J
cas 1	$[-4 ; 2]$	$[-1 ; 6]$
cas 2	$] -\infty ; 3]$	$[-2 ; +\infty [$
cas 3	$] -\infty ; 7]$	$] -\infty ; 4]$
cas 4	$[3 ; +\infty [$	$[-5 ; +\infty [$

EXERCICE 4 (4 POINTS) VALEUR ABSOLUE

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

- On considère la phrase suivante : « L'ensemble des réels x dont la distance à 2 est inférieure ou égale à 5 »
 - Traduire cette phrase par une inéquation utilisant une valeur absolue.
 - Donner l'intervalle solution de cette inéquation.

2. On considère l'inéquation d'inconnue x : $|x - 3| \geq 5$.

(a) Représenter sur la droite des nombres réels les solutions de cette inéquation.

(b) Donner, à l'aide des intervalles, l'ensemble solution de cette inéquation.

EXERCICE 5 (5 POINTS) UN PEU DE PYTHON

On considère le script du programme de calcul suivant :

```
• 1 from math import sqrt
• 2 x=float(input("Entrer un nombre réel positif :"))
• 3 if 0<=x<1:
• 4     a = 1/sqrt(1-x)
• 5 elif x<4:
• 6     a=2*x-1
• 7 else :
• 8     a=(x**2-1)/7
• 9 print("a =",a)
```

1. Expliquer, par une phrase courte, à quoi sert la ligne 1 de ce programme?

2. Expliquer, par une phrase courte, à quoi sert la ligne 2 de ce programme?

3. Quel est le plus petit ensemble auquel appartient la variable "a" lorsque l'on entre le nombre réel positif 2?

4. Quel est le plus petit ensemble auquel appartient la variable "a" lorsque l'on entre le nombre réel positif $3\sqrt{2}$?

5. Quel est le plus petit ensemble auquel appartient la variable "a" lorsque l'on entre le nombre réel positif $\frac{5}{9}$?

EXERCICE 6 (4 POINTS) ALGORITHME EN LANGAGE NATUREL

On considère l'algorithme en langage naturel du programme "nombre" ci-dessous, qui demande d'entrer un nombre a et qui renvoie e :

Entrer un réel a
 b prend la valeur de a^2 ;
 c prend la valeur $a - b$
 d prend la valeur $2c$
 e prend la valeur $d - c + b$
Renvoyer e
Fin

1. Préciser le plus petit ensemble de nombres auquel appartient "e" pour les valeurs suivantes du réel "a" : -4 puis $\sqrt{2}$.
2. On souhaite prouver que pour tout nombre a , on a "nombre(a)= a ".
 - (a) Exprimer c en fonction de a uniquement.
 - (b) En déduire d en fonction de a .
 - (c) En déduire e en fonction de a .
 - (d) Conclure.

EXERCICE 7 (3 POINTS) UNE DÉMONSTRATION UTILE

On souhaite établir l'égalité suivante connue des Égyptiens.

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Tester cette égalité pour 5 valeurs différentes de n .
2. Prouver que cette égalité est vraie pour tout $n > 0$.
3. **Question bonus ! ; 1 point hors barème**

En déduire la valeur de la somme :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2020 \times 2021}$$