DTL DE MATHÉMATIQUES
Nom du professeur : PONS
Classe : 2^{de} F

Date du DTL : mercredi 13 janvier 2021
Durée de l'épreuve : 2 heures.

Matériel autorisé	Calculatrice, dans le cadre de la règlementation en vigueur
Consignes particulières	Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte, sauf précision contraire de l'énoncé.

barème sur 26 points

Exercice 1 (9 points) Géométrie repérée

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J)$, on considère les points $A(3\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 9)$, $C(11\ ;\ 5)$ et $D(10\ ;\ -3)$.

1. (a) Les coordonnées des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$ sont respectivement :

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_C}{2}\right) \textit{ et } \left(\frac{x_B+x_D}{2}\ ;\ \frac{y_B+y_D}{2}\right)$$
$$\left(\frac{3+11}{2}\ ;\ \frac{1+5}{2}\right) \textit{ et } \left(\frac{4+10}{2}\ ;\ \frac{9+(-3)}{2}\right)$$
$$(\mathbf{7}\ ;\ \mathbf{3}) \textit{ et } (\mathbf{7}\ ;\ \mathbf{3})$$

   (b) On en déduit que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu de coordonnées $(7\ ;\ 3)$.
   Les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont aussi les diagonales du quadrilatère $ABCD$, or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme ; donc $ABCD$ **est un parallélogramme**.

2. (a) Pour calculer les longueurs exactes de AB et BC, on applique la définition de la

distance entre deux points du plan.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \ et \ BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (9-1)^2} \ et \ BC = \sqrt{(11-4)^2 + (5-9)^2}$$
$$AB = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} \ et \ BC = \sqrt{(7)^2 + (-4)^2}$$
$$\mathbf{AB = \sqrt{65}} \ et \ \mathbf{BC = \sqrt{65}}$$

(b) On en déduit que le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur et comme ses côtés opposés sont égaux deux à deux (définition d'un parallélogramme, alors le parallélogramme $ABCD$ a tous ses côtés de même longueur. Par définition un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur est un losange ; donc le quadrilatère $ABCD$ **est un losange**.

3. Le quadrilatère $ABCD$ est un carré, si c'est un parallélogramme avec quatre angles droits ou si c'est un losange avec des diagonales de même longueur.
   Or :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \ et \ BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$
$$AC = \sqrt{(11-3)^2 + (5-1)^2} \ et \ BD = \sqrt{(10-4)^2 + (-3-9)^2}$$
$$AC = \sqrt{(8)^2 + (4)^2} \ et \ BD = \sqrt{(6)^2 + (12)^2}$$
$$\mathbf{AC = \sqrt{80}} \ et \ \mathbf{BD = \sqrt{180}}$$

   Par conséquent les diagonales ne sont pas de même longueur et le losange $ABCD$ **ne peut pas être un carré**.

4. On note K le milieu du segment $[AC]$.
   On connaît une propriété des diagonales d'un losange ; les diagonales se coupent en leur milieu (car c'est un parallélogramme) et perpendiculairement (car c'est un losange). Or K est le milieu d'une diagonale ([AC]) du losange $ABCD$; donc le triangle AKB est rectangle en K.

5. L'aire du quadrilatère $ABCD$ est quatre fois l'aire du triangle AKB étant donné que le losange $ABCD$ est constitué de quatre triangles égaux au triangle AKB.
   On calcule alors l'aire :

$$aire = 4 \times \frac{KA \times KB}{2} = 2 \times KA \times KB$$
$$aire = 2 \times \frac{1}{2}AC \times \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times \sqrt{80} \times \sqrt{180}$$
$$aire = \frac{1}{2} \times \sqrt{120^2} = 60$$

L'aire est de 60 (unités d'aire).

6. On représente tous les points et tous les résultats établis dans cet énoncé.

Exercice 2 (4 points) Les intervalles

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variations.

x	-2		0		1		4
variations de f	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Répondre, **SANS JUSTIFICATION**, aux questions suivantes.

1. L'ensemble de définition de f est l'intervalle $[\ \mathbf{-2}\ ;\ \mathbf{4}\ ]$.
2. L'image de 0 par f est $\mathbf{-3}$.
3. f est décroissante sur $[\ \mathbf{-2}\ ;\ \mathbf{0}\ ]$ et sur $[\ \mathbf{1}\ ;\ \mathbf{4}\ ]$.
4. On trace une représentation graphique possible de la fonction f.

Exercice 3 (8 points) Lecture graphique d'une courbe

On considère la courbe représentative de la fonction g **donnée en annexe**.

1. L'ensemble de définition de la fonction g est l'***ensemble des abscisses*** x ***des points de la courbe de la fonction*** f ; autrement dit ici l'intervalle $[\ \mathbf{-2}\ ;\ \mathbf{5}\ ]$.
2. Les antécédents de 0 par g sont les ***abscisses des points d'intersection de la courbe de*** g ***avec l'axe des abscisses (d'équation y=0)*** ; autrement dit ici **ils sont au nombre de quatre**.
3. (a) Sur l'intervalle $[\,2\,;\,4\,]$, ***la courbe de*** g ***est en dessous de l'axe des abscisses*** donc tous ses points sont d'ordonnée négative ; autrement dit g **est négative**.

   (b) Sur l'intervalle $[\ 1\ ;\ 3\ ]$, ***la courbe de*** g ***est décroissante*** donc la fonction g **est décroissante** sur l'intervalle $[\ 1\ ;\ 3\ ]$.
4. Si x appartient à l'intervalle $[\ 1\ ;\ 5\ ]$, $g(x)$ prend ***toutes les valeurs de la valeur minimale des ordonnées des points de la courbe à la valeur maximale des ordonnées des points de la courbe*** ; autrement dit ici $g(x)$ appartient à l'intervalle $[\ \mathbf{-5}\ ;\ \mathbf{4}\ ]$.
5. On s'intéresse à l'équation $g(x) = k$ où k est un réel fixé.

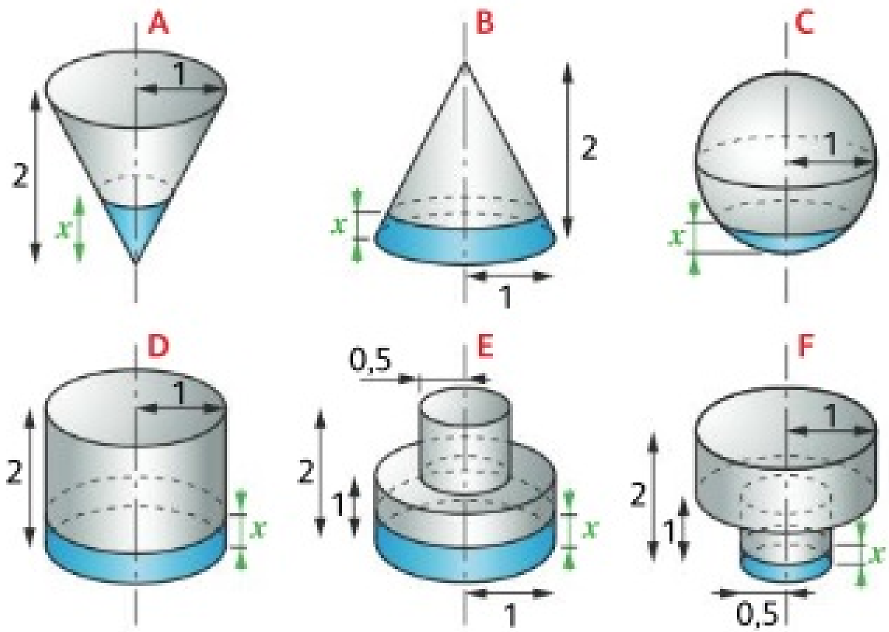
   (a) On cherche ***les abscisses des points d'intersection de la courbe de*** g ***avec l'axe d'équation*** $y = k$.

(b) Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 2$, ***c'est chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe de g avec l'axe d'équation*** $y = 2$. Après avoir tracé cet axe sur le graphique, on obtient les trois solutions : $\mathbf{-1,75}$; $\mathbf{1}$; $\mathbf{4,7}$.

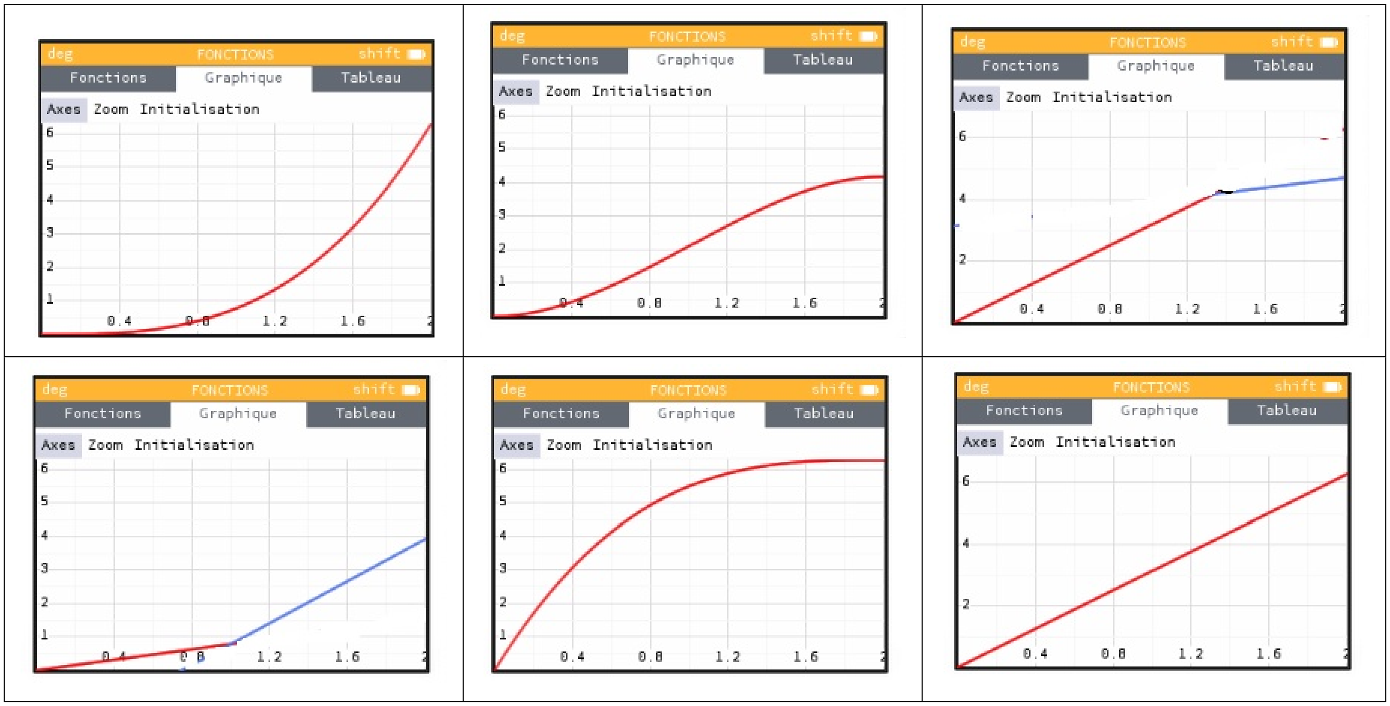
(c) L'équation $g(x) = k$ admet une unique solution lorsque ***la courbe de g n'a qu'un seul point d'intersection avec l'axe horizontal d'équation*** $y = k$; autrement dit pour $\mathbf{k = -5}$ ou bien pour $\mathbf{k} \in]\ \mathbf{3}\ ,\ \mathbf{4}\ ]$.

Exercice 4 (5 points) Les fonctions et une histoire de volumes

On donne les solides suivants.



On remplit d'eau ces solides. x est la hauteur de liquide dans chaque récipient. Pour chaque solide, on s'intéresse à la fonction qui à x associe le volume d'eau dans le solide. Un grapheur a permis de tracer les courbes représentatives ci-dessous. **Associer chaque courbe à un solide, en expliquant le choix fait**.



- Le graphique **bas-droite** correspond au cylindre **D** car le remplissage est à vitesse constante étant donner que la section du volume à remplir ne varie pas.
- Le graphique **bas-centre** correspond au cône **A** car la section augmente et donc le volume rempli augmente de moins en moins vite.
- Le graphique **bas-gauche** correspond au solide **E** car la section diminue d'un coup et donc le volume se rempli plus vite dans la deuxième phase ; de plus sur chaque phase on retrouve un comportement de droite (proportionnel) comme pour le cylindre D.
- Le graphique **haut-droite** correspond au solide **F** et les explications sont identiques au point précédent mais avec l'inversion des phases du fait de la diminution de la section.
- Le graphique **haut-centre** correspond au solide **C** par élimination ou car la courbe augmente d'abord lentement et ensuite plus rapidement d'après sa courbure, ce qui correspond bien à l'augmentation du volume d'abord lente car la section de la sphère augmente puis plus rapide après la moitié de la sphère car la section diminue.
- Le graphique **haut-gauche** correspond au cône **B** car la section diminue et donc le volume rempli augmente de plus en plus rapidement.

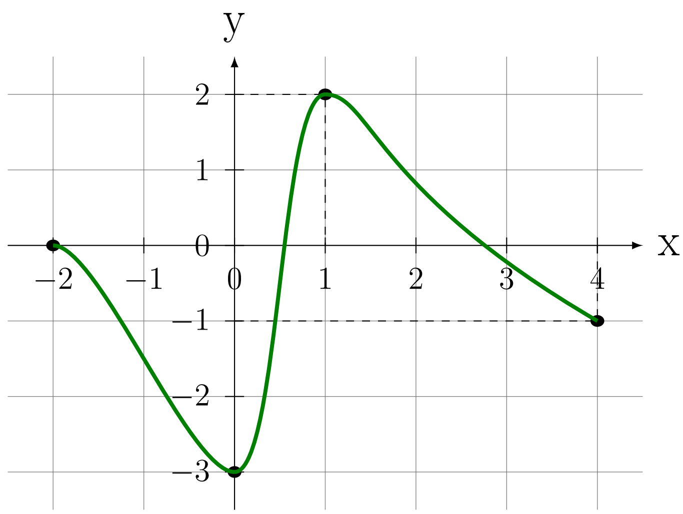
ANNEXE

Cette annexe est à compléter et à rendre avec votre copie.

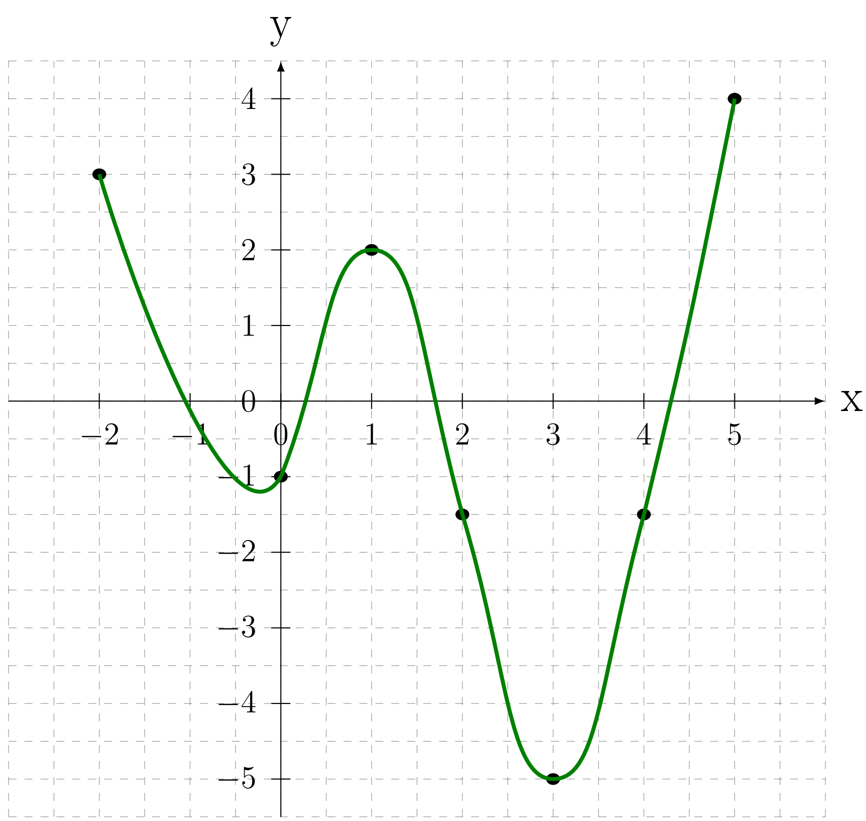
Vous garderez le sujet.

NOM : .... PRÉNOM : ....

Exercice 2 :



Exercice 3 : courbe de la fonction g.



Exercice 1 :