

Date du DTL : mercredi 31 mars 2021

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Matériel autorisé	Calculatrice, dans le cadre de la réglementation en vigueur
Consignes particulières	Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte, sauf précision contraire de l'énoncé.

barème sur 20 points

Exercice 1 (4 POINTS) LES FONCTIONS

On considère une fonction f définie sur $[-2 ; 5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de valeurs et le tableau de variations.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	-3	0	1	4	5,5	2

x	-2	0	3.5	5
$f(x)$	4		6	
		-3		2

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ? Justifier.

(a) Le maximum de f sur $[-2 ; 5]$ est 5,5.

Faux ; ce maximum est 6 et est atteint en $x = 3,5$.

(b) $f(1,5) < f(2,5)$

Vrai ; la fonction est croissante sur l'intervalle $[0 ; 3,5]$ et cet intervalle contient les valeurs 1,5 et 2,5, donc $1,5 < 2,5 \implies f(1,5) < f(2,5)$.

(c) L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions : -2 et 3.

Faux ; $f(-2) = 4$, $f(3) = 4$ et la courbe de la fonction passe une troisième fois par l'ordonnée 4 sur l'intervalle $[3,5 ; 5]$ car f est décroissante avec $f(3,5) = 6$ et $f(5) = 2$ soit $f(5) < 4 < f(3,5)$.

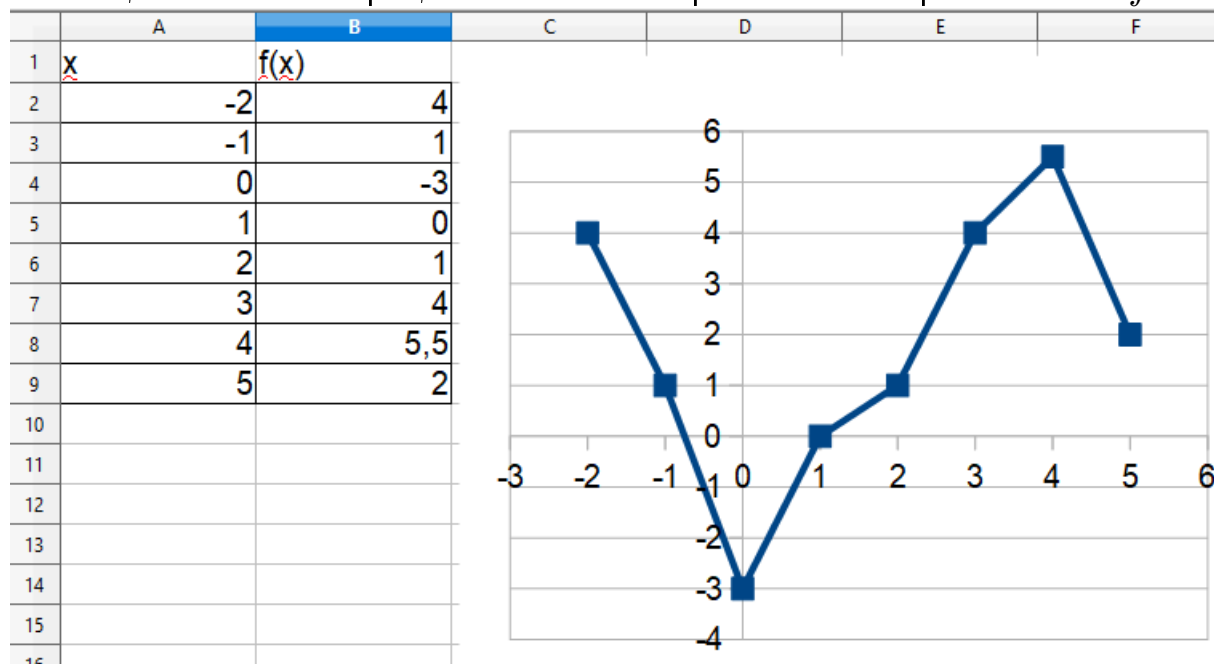
(d) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions : -1 et 2 .

Vrai ; ces solutions sont données par $f(-1) = 1$ et $f(2) = 1$ et par la monotonie de f qui permet d'envisager une solution dans l'intervalle $[-2 ; 0]$, puis une solution dans l'intervalle $[0 ; 3,5]$ et enfin aucune solution dans l'intervalle $[3,5 ; 5]$ sur lequel $f(x) \geq 2$.

(e) Le minimum de f sur $[-2 ; 5]$ est -3 .

Vrai ; nous avons $f(0) = -3$ et pour tout réel $x \in [-2 ; 5]$, $f(x) \geq -3$ d'après le tableau de variations.

2. Tracer, sur votre copie, une courbe représentative possible de f .



Exercice 2 (5 POINTS) CALCUL LITTÉRAL

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$ (forme 1).

1. Montrer que les expressions suivantes sont égales à $f(x)$ pour tout réel x .
 $(x - 2)(x - 4)$ (forme 2) et $(x - 3)^2 - 1$ (forme 3)

$$A = (x - 2)(x - 4) \quad B = (x - 3)^2 - 1$$

$$A = x^2 - 2x - 4x + 8 \quad B = x^2 - 2 \times x \times 3 + 9 - 1$$

$$A = x^2 - 6x + 8 \quad B = x^2 - 6x + 8$$

On a donc bien établi que $(x - 2)(x - 4) = (x - 3)^2 - 1 = f(x)$.

2. Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme la mieux adaptée.

(a) Calculer $f(1)$.

A l'aide de la forme développée : $f(1) = 1 - 6 + 8 = 3$.

(b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

A l'aide de l'expression factorisée : $f(x) = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0$

C'est une équation produit avec membre nul, d'où :

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 4$$

Les solutions de l'équation sont : 2 et 4.

(c) Déterminer les antécédents de 8 par la fonction f .

A l'aide de la forme développée ; on cherche x tel que

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = 8.$$

$$x^2 - 6x + 8 = 8 \iff x^2 - 6x = 0 \iff x(x-6) = 0$$

C'est encore une équation produit avec membre nul, dont les solutions sont : 0 et 6.

(d) Déterminer les nombres ayant pour image 3 par la fonction f . A l'aide de la forme $f(x) = (x-3)^2 - 1$:

$$(x-3)^2 - 1 = 3 \iff (x-3)^2 = 4 \iff (x-3)^2 - 2^2 = 0$$

On factorise à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ pour obtenir encore une équation produit avec membre nul dont les solutions sont : 5 et 1.

Exercice 3 (3 POINTS) FONCTION AFFINE

h est une fonction affine définie sur $[-5 ; 5]$. Elle admet le tableau de signe suivant :

x	-5	2	5
signe de $h(x)$	-	0	+

De plus le minimum de h sur $[-5 ; 5]$ est -3 .

1. Dresser le tableau de variation de la fonction h .

Comme h est une fonction affine, son tableau de signe nous dit qu'elle est strictement croissante (de sorte que les ordonnées sont d'abord négatives)

et que de plus $h(-5) = -3$ car -3 est le minimum de h et ce minimum ne peut être atteint que en -5 du fait que h est croissante (strictement).

x	-5	5
variat. de h	-3	$h(5)$

2. Déterminer son expression algébrique.

On connaît les coordonnées de deux points : $(2 ; 0)$ et $(-5 ; -3)$;

on peut donc calculer le coefficient directeur : $m = \frac{0 - (-3)}{2 - (-5)} = \frac{3}{7}$; on a

alors : $h(x) = \frac{3}{7}x + p$ où p reste à déterminer ;

comme le point de coordonnées $(2 ; 0)$ est sur la droite représentant la fonction h , alors ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe de h ,
 $y = \frac{3}{7}x + p$.

Autrement dit : $\frac{3}{7} \times 2 + p = 0$ et donc $p = -\frac{6}{7}$.

Pour terminer : $f(x) = \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}$.

3. Tracer sa représentation graphique.

On essaie de faire apparaître l'une des méthodes de construction du cours...et surtout on essaie de graduer en coupant l'unité en 7 pour gérer les fractions.

Exercice 4 (5 POINTS) LES PROBABILITÉS

Dans un club de remise en forme, les 600 adhérents peuvent choisir entre trois formules :

- la formule sportive (notée S)
- la formule relaxation (notée R)
- la formule liberté (notée L) permettant d'accéder à toutes les installations.

Le club comporte 64 % de femmes qui choisissent, pour 50 % d'entre elles, la formule relaxation et pour 37,5 % d'entre elles, la formule liberté.

De plus, 25 % des hommes choisissent la formule relaxation et pour la moitié des hommes, le choix se porte sur la formule sportive.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Formule	S	R	L	Total
Femme	48	192	144	384
Homme	108	54	54	216
Total	156	246	198	600

Le travail consiste à donner les justifications des valeurs qui sont reportées dans le tableau :

- Le club comporte 64 % de femmes ; soit $\frac{64}{100} \times 600 = 64 \times 6 = 384$; les femmes sont au nombre de 384.
- 50 % d'entre elles choisissent la formule relaxation ; soit $\frac{50}{100} \times 384 = 192$; ou 192 femmes pour la formule relaxation.
- 37,5 % d'entre elles choisissent la formule liberté ; soit $\frac{37,5}{100} \times 384 = 144$.
- On complète alors la première ligne et la dernière colonne par **sous-traction au total**.
- On recommence le même travail avec les données sur les hommes...
- Enfin on calcule les totaux par **addition**.

2. Un adhérent est choisi au hasard.

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité et chaque adhérent a une probabilité d'être choisi de $\frac{1}{600}$.

- (a) Calculer la probabilité que l'adhérent soit un homme ayant choisi la formule relaxation.

Il y a 54 hommes pour la relaxation parmi les 600 adhérents ; d'où la probabilité de : $54 \times \frac{1}{600} = \frac{9}{100}$.

- (b) Calculer la probabilité qu'un adhérent soit une femme ou ait choisi la formule sportive.

Il y a 384 femmes et 108 hommes réalisant la condition de l'énoncé ; d'où une probabilité de : $492 \times \frac{1}{600} = \frac{41}{50}$.

(c) Calculer la probabilité qu'un adhérent n'ait pas choisi la formule liberté.

Il y a $600 - 198 = 402$ adhérents qui n'ont pas choisi la formule Liberté ; d'où la probabilité de : $\frac{402}{600} = \frac{67}{100}$.

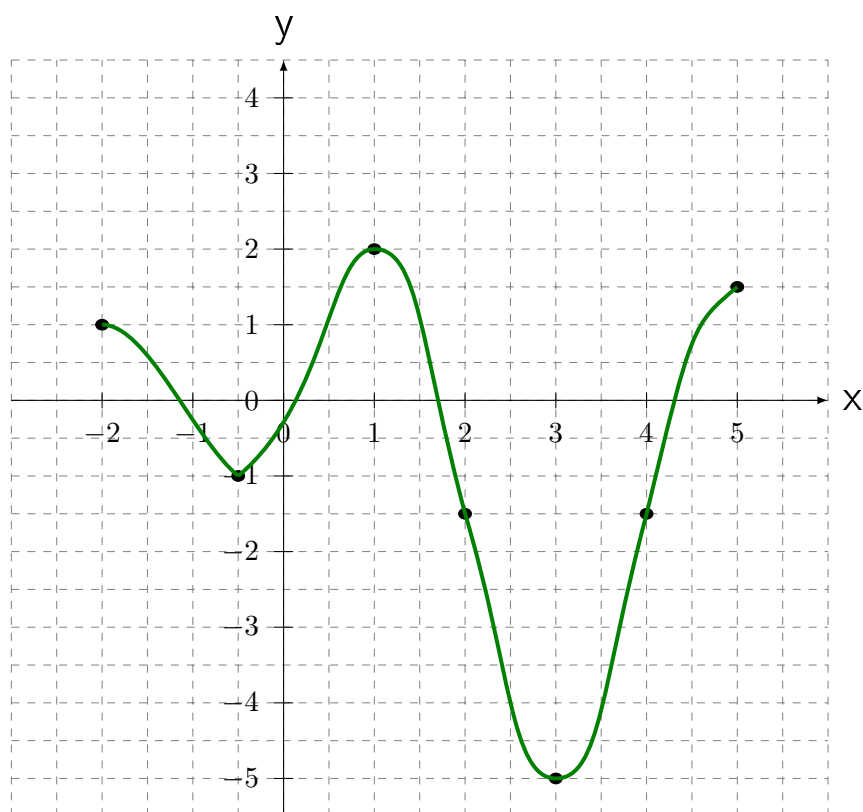
(d) Un client ayant la formule liberté est sélectionné.

Calculer la probabilité que ce soit une femme.

Il y a 144 femmes qui ont choisi la formule Liberté parmi les 198 adhérents qui ont la formule Liberté ; d'où la probabilité de : $\frac{144}{198} = \frac{8}{11}$.

Exercice 5 (3 POINTS) LES FONCTIONS

Soit la fonction g définie par sa courbe représentative ci-dessous.



1. Dresser le tableau de variations de g .

x	-2	-0.5	1	3	5
variat. de g	1	-1	2	-5	1.5

2. Quel est le maximum de g ?

En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

Le maximum de g est atteint en $x = 1$ et vaut $2 = g(1)$; en effet pour tout $x \in [-2 ; 5]$ on a $g(x) \leq 2$ et $g(1) = 2$...ce qui est la définition d'un maximum.

3. Peut-on affirmer que pour tout réel $x \in [-2 ; 5]$, on a $g(x) \geq -5$? Justifier.

On peut affirmer ce que dit l'énoncé car d'après le tableau de variations et la courbe de la fonction ; -5 constitue un minimum de g sur $[-2 ; 5]$; en effet pour tout $x \in [-2 ; 5]$ on a $g(x) \geq -5$ et $g(3) = -5$...ce qui est la définition d'un minimum.

Exercice 6 (2 POINTS) BONUS, HORS BARÈME

A l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe du produit $(3x + 1)(4 - 2x)$.

On applique le travail fait en cours...pour obtenir le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
signe $3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
signe $4-2x$	$+$	$+$	0	$-$
signe $(3x+1)(4-2x)$	$-$	0	0	$-$