**Exercice 1 :**

1. $\boldsymbol{d_1}$ **= 50** car la distance parcourue le premier jour est de 50 kilomètres
   $\boldsymbol{d_2}$ **=** $0{,}99\times 50=49{,}5$ car la distance parcourue le deuxième jour à diminuée de 1 %.
   $\boldsymbol{d_3}$ **=** $0{,}99\times 49{,}5=49{,}005$ avec une diminution de 1 %.
2. D'un jour à l'autre, la distance parcourue <u>diminue de 1 %</u>, ce qui <u>revient à multiplier</u> la distance parcourue chaque jour <u>par 0,99</u> d'une journée à l'autre, soit donc $\boxed{d_{n+1}=0{,}99\times d_n}$ .
   <u>On passe donc d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par 0,99</u> ; par conséquent la suite ($d_n$) est une suite **géométrique** de raison 0,99 et de premier terme $d_1$=50.
   Comme la suite est géométrique, alors $\boxed{d_n=50\times 0{,}99^{n-1}}$ (premier terme $d_1$ donc « n-1 » !)
3. 
   a) $L_n=d_1+...+d_n=50+50\times 0{,}99+...+50\times 0{,}99^{n-1}$

   $L_n=50(1+0{,}99+...+0{,}99^{n-1})$ soit encore : $\boxed{L_n=50\times\dfrac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99}=5\,000\times(1-0{,}99^n)}$

   b) Comme $0<0{,}99<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}99^n=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n=5000}$ .
4. Il y a plusieurs possibilités, soit utiliser la <u>représentation graphique</u> de la fonction $L(x)=50\times 0{,}99^{x-1}$ et son tableau de valeurs, soit utiliser le <u>tableur</u> et générer le calcul des termes successifs de la suite ($L_n$), soit encore <u>programmer</u> le calcul des sommes successives en utilisant une boucle « while » avec la condition « $L_n$>4999» comme condition d'arrêt, soit encore (et c'est la méthode utilisée dans ce corrigé) utiliser les <u>fonctions de la calculatrice</u> pour résoudre l'inéquation d'inconnue n (entier naturel) : $5000\times(1-0{,}99^{\text{n}})\geqslant 4999$ .
   Ce qui donne sur la calculatrice « Ti-nspire CX » :

   À partir du clavier, sur une page de calcul, taper :
   1. menu
   2. algèbre
   3. résolution
   Sur l'écran taper dans la fonction affichée :

   *Solve(5000.(1-0,99$^n$ > 4999 , n)*

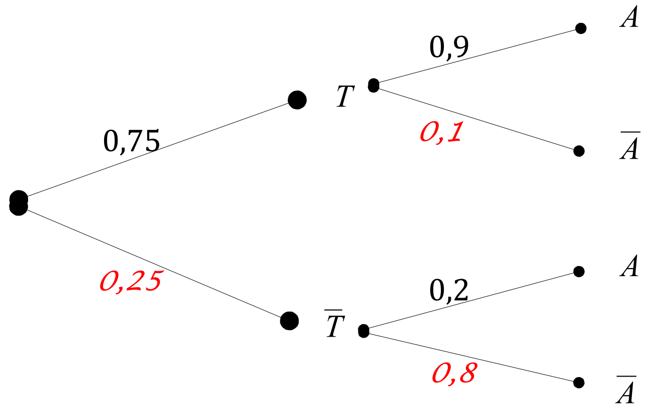
   Puis taper « enter », et la calculatrice affiche :

   *n ≥ 847,454*

   Il faut donc **<u>au moins 848 jours</u>** pour que le globe trotter parcoure 4999 km.

**Exercice 2 :**

1. Arbre pondéré traduisant les données (et uniquement les données !) :




*Les données en italique (et rouge) seront à justifier ultérieurement !*

2.

a) $\boxed{p(T\cap A)=p_T(A)\times p(T)=0{,}9\times 0{,}75=0{,}675}$

b) De même : $\underline{p(T\cap \bar{A})=0{,}1\times 0{,}75=0{,}075}$ avec $\boxed{p_T(\bar{A})=1-p_T(A)=1-0{,}9=0{,}1}$ !

c) De même : $\underline{p(\bar{T}\cap A)=0{,}25\times 0{,}2=0{,}05}$ avec $\boxed{p(\bar{T})=1-p(T)=1-0{,}75=0{,}25}$ !

d) De même : $\underline{p(\bar{T}\cap \bar{A})=0{,}25\times 0{,}8=0{,}2}$ avec $\boxed{p_{\bar{T}}(\bar{A})=1-p_{\bar{T}}(A)=1-0{,}2=0{,}8}$ !

3.

a) $p(A)=p(A\cap T)+p(A\cap \bar{T})=0{,}675+0{,}075=0{,}75$ .

b) $p_A(T)=\dfrac{p(A\cap T)}{p(A)}=\dfrac{0{,}675}{0{,}75}=0{,}9$ .

4. $p(S)=p(A\cap \bar{T})+p(\bar{A}\cap T)=0{,}05+0{,}075=0{,}125$

5. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec trois épreuves successives et indépendantes et une probabilité de succès à chaque épreuve de 0,125 (le succès étant « l'élève est surpris »).

L'événement contraire est « aucun élève n'est surpris », de probabilité : $(1-0{,}125)^3$

La probabilité cherchée est donnée par : $\underline{1-(1-0{,}125)^3\approx 0{,}330}$ <u>arrondi au millième.</u>

**<u>Exercice 3 :</u>**

Partie A :

1. $g'(x)=1\times\exp(x)+(x-3)\times\exp(x)=(1+(x-3))\times\exp(x)=(x-2)\times\exp(x)$ .

$g'(x)$ est du signe de $(x-2)$ car la fonction exp est toujours positive ;

*donc* $g'(x)$ est <u>négative sur [ 0 ; 2 ]</u> et <u>positive sur [ 2 ; 4 ].</u>

2. Tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle [ 0 ; 4 ] :

| $x$ | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | − | 0 | + | |
| g(x) | | ↘ | *g(2)* | ↗ | |

Avec $g(2)=10-\exp(2)$ soit $\underline{g(2)\approx 2{,}6}$

3. D'après le tableau de variation de la fonction *g*, celle ci admet un minimum qui est positif sur l'intervalle [ 0 ; 4 ] , donc <u>*g(x)* est **positif** sur [ 0 ; 4 ]</u> .

Partie B :

1. $f'(x)=10+1\times\exp(x)+(x-4)\times\exp(x)=10+(1+(x-4))\times\exp(x)=10+(x-3)\times\exp(x)$ .
On conclut donc que $f'(x)=g(x)$ .
2. Comme *g(x)* est **positif** sur [ 0 ; 4 ], alors <u>la fonction *f* est **croissante** sur [ 0 ; 4 ]</u>.

Partie C :

1. Les coûts fixes de l'entreprise sont donnés par $f(0)=10$ , soit **<u>10 000 euros</u>**.

2.

a) Le coût marginal est donc représenté par la fonction $g$ (car $f'(x)=g(x)$) , d'autre part $g(4)=10+\exp(4)$ soit $g(4)\approx 64{,}5892$ à $10^{-4}$ près.

La fonction g est donc strictement croissante de $g(2)\approx 2{,}6$ à $g(4)\approx 64{,}5892$ sur l'intervalle [ 2 ; 4 ] (et continue!), par conséquent il existe un unique réel $x_0$ tel que $g(x_0) = 11$ sur [ 2 ; 4 ].

Par ailleurs $g(0)=7$ or $7<11$ et comme $g$ est décroissante sur [ 0 ; 2 ] , alors elle ne peut prendre la valeur 11.

Il existe donc une unique production $x_0$ qui réponde au problème.

b) A l'aide de la calculatrice, on obtient : (toujours avec plusieurs manières de faire, comme à l'exercice 1) En passant par la représentation graphique et après un réglage de la table des valeurs numériques, on trouve pour $x=3{,}0474$ alors $g(x)\approx 10{,}9983$ et pour $x=3{,}0475$ alors $g(x)\approx 11{,}0115$ . Il faut donc produire <u>environ **3 050 kilos** à 10 kg</u> près, pour atteindre un coût marginal de 11 000 €.

**<u>Exercice 4 :</u>**

1.

a) $f'(1)=f'(3)=0$ car les tangentes aux points N et Q sont horizontales, donc les coefficients directeurs sont nuls.

$f'(2)=\frac{-3}{2}$ Car c'est la valeur du coefficient directeur de la droite Δ passant par les points P et S.

b) La droite Δ a pour coefficient directeur $f'(2)$ donc pour équation : $y=\frac{-3}{2}\cdot x+P$ avec $P$ un réel à déterminer. D'autre part S est un point de Δ, donc ses coordonnées vérifient l'égalité $1=\frac{-3}{2}\times 3+P$ soit dont $P=\frac{11}{2}$ . D'où l'**équation de Δ** : $\boxed{y=\frac{-3}{2}\cdot x+\frac{11}{2}}$ .

2.

a) On trace l'axe d'équation $y=3$ et on compte les points d'intersection avec la courbe de la fonction sur l'intervalle [ 0 ; 4 ]. On trouve donc **<u>3 solutions</u>** à l'équation proposée.

b) Cette droite passe par les points M $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ et R $\left(4;\frac{11}{2}\right)$ . On prend alors pour solution de l'inéquation, toutes les abscisses des points de la courbe qui se trouvent en dessous de la droite (MR). On trouve donc comme **solutions <u>tous les réels de l'intervalle [ 2 ; 4 ]</u>**.

3. D'après le graphique, comme la courbe de $f$ est au-dessus de l'axe des abscisses, alors la fonction $f$ est positive sur l'intervalle [ 0 ; 4 ]. Comme $f$ est la dérivée de $F$ et que $f$ est positive sur [ 0 ; 4 ], alors <u>*F* est une fonction **croissante** sur [ 0 ; 4 ]</u>.

4. -

a) Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 |
| $f(x)$ | $3/2$ | ↗ | $7/2$ | ↘ | $3/2$ | ↗ | $7/2$ |

b) Comme $\boxed{g(x)=\frac{1}{f(x)}}$ , alors sa dérivée est $g'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ , donc $\boldsymbol{g'(x)}$ a le <u>signe contraire</u> de $f'(x)$, alors la fonction $\boldsymbol{g}$ a le <u>sens contraire de variation</u> de la fonction $f$.

On en déduit le tableau de variation de $g$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 |
| $g(x)$ | $2/3$ | ↘ | $2/7$ | ↗ | $2/3$ | ↘ | $2/7$ |