DST 2 de Mathématiques

Classe : T$^{\text{les}}$ ES1 et ES2 **Professeurs :** ML Brivezac, E. Pons et S. Glavier **Date :** 4 novembre 2016

Nombre d'élèves : respectivement 36, 19 et 17

Durée : 3h **Calculatrice autorisée** **Sortie anticipée :** 2h30

Exercice 1 – Commun à tous les candidats (*5 points*)

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes pouvant être traitées séparément.

Partie A – Économie

Une entreprise fabrique des ballons de handball haut de gamme.
Le coût total de fabrication, exprimé en euros, est donné par :

$$C(q) = q^3 - 5q^2 + 40q + 400$$

où q, exprimé en dizaines, représente la quantité produite ; on admettra que $q \in [0; 16]$.
Chaque ballon est vendu 40 euros pièce.

1) Le bénéfice a pour expression : $B(q) = R(q) - C(q)$ avec R la recette.
Comme q est en dizaine, **la recette pour 1 unité doit être multipliée par** 400 **!** ;
On obtient donc : $B(q) = 400q - (q^3 - 5q^2 + 40q + 400)$, soit $B(x) = -q^3 + 5q^2 + 360q - 400$.

2) a) Pour étudier les variations de la fonction B :

- B est dérivable sur $[0; 16]$ comme fonction polynôme et $B'(x) = -3q^2 + 10q + 360$.
- $-3q^2 + 10q + 360$ est un polynôme du second degré de racines :
  $\dfrac{5 + \sqrt{1105}}{3} \approx 12$ et $\dfrac{5 - \sqrt{1105}}{3} \approx -9$.
  $B'(x)$ est du signe de $a = -3$ sauf entre les racines.
  Donc $B'(x) > 0$ sur $[\ 0\ ;\ \frac{5+\sqrt{1105}}{3}\ ]$, donc la fonction B est croissante (strictement) ;
  $B'(x) < 0$ sur $[\ \frac{5+\sqrt{1105}}{3}\ ;\ +\infty\ ]$, donc la fonction B est décroissante (strictement) ;

b) Tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0; 16]$:

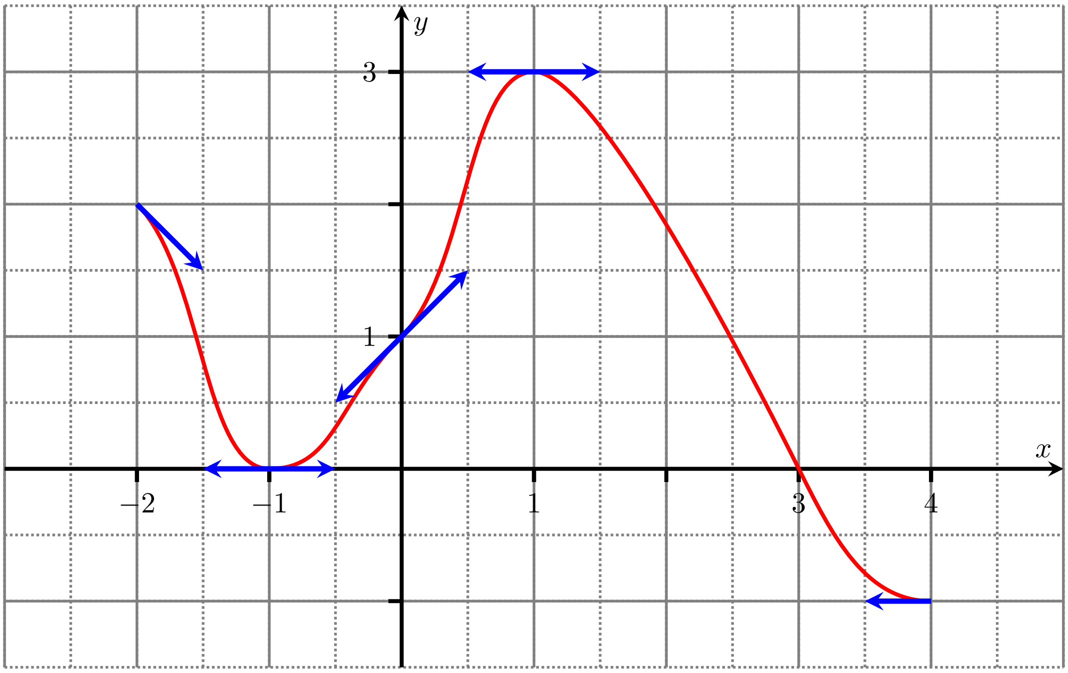
x	0		$\frac{5+\sqrt{1105}}{3}$		16
$B'(x)$		$+$		$-$	0
$B(x)$	-400	$\nearrow$	$B(\frac{5+\sqrt{1105}}{3})$	$\searrow$	2544

avec : $B(\frac{5+\sqrt{1105}}{3}) \approx 2930$

3) La courbe de B passe par un maximum en $\frac{5+\sqrt{1105}}{3}$ soit environ $\approx 12,7$ et $B(12) \approx 2912$, $B(13) \approx 2928$.
Le nombre de ballons à produire pour obtenir un bénéfice maximum est de 130 ballons, arrondi à l'unité.

Partie B – Lectures graphiques

Une fonction f dérivable sur $I = [-2\,;\,4]$ est représentée par la courbe ci-dessous.
Sa fonction dérivée est notée f'. La tangente au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,2)$.



1) Lire graphiquement : $f(1)$ et $f(0)$ sont **les ordonnées des points de la courbe d'abscisse** 1 **et** 0, soit respectivement 3 et 1.
$f'(1)$ et $f'(0)$ sont **coefficients directeurs des tangentes à la courbe au points d'abscisses** 1 **et** 0, soit respectivement 0 (car la tantente est horizontale) et 1 (car la pente est de 1).

2) L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est donnée par :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit pour finir $y = x + 1$.

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) > 0$ sur I, c'est **trouver les abscisses des points pour lesquelles la courbe de f est strictement croissante**, soit sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

Exercice 2 – Commun à tous les candidats (*4 points*)

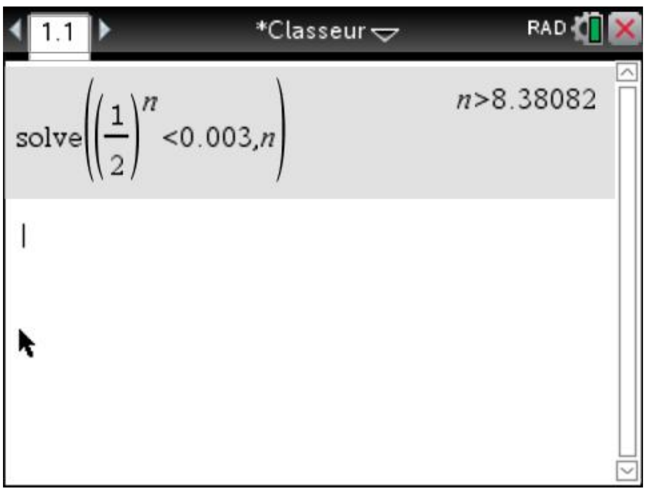
Il s'agit de l'exercice 2 du sujet de baccalauréat d'Amérique du Sud, novembre 2009. Je vous renvoies au corrigé proposé sur le site de l'APMEP !

Exercice 3 – Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (*5 points*)

Pour ce questionnaire à choix multiples ; il ne fallait pas hésiter à utiliser la calculatrice pour obtenir les trois premières réponses !
Les questions sur les pourcentages nécessitaient de poser le calcul avant de pouvoir utiliser la calculatrice.
Les réponses attendues étaient : **1.b-2.b-3.b-4.c-5.c**

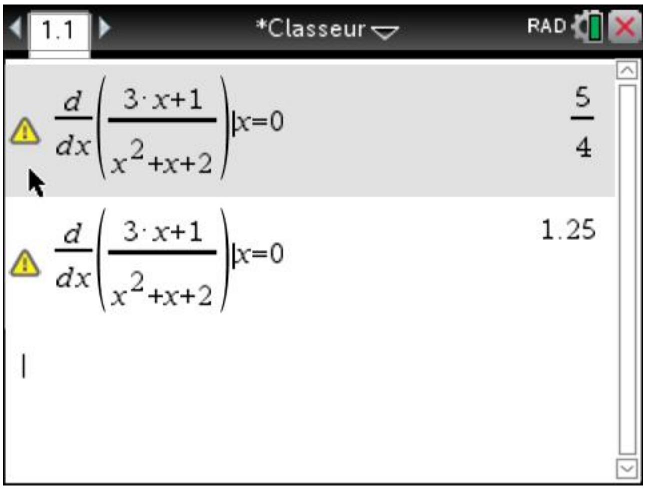
Barème *: Une réponse exacte rapporte* 1 *point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse enlève* 0,25 *point.*

1) Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(\frac{1}{2})^n < 0,003$ sont tels que :

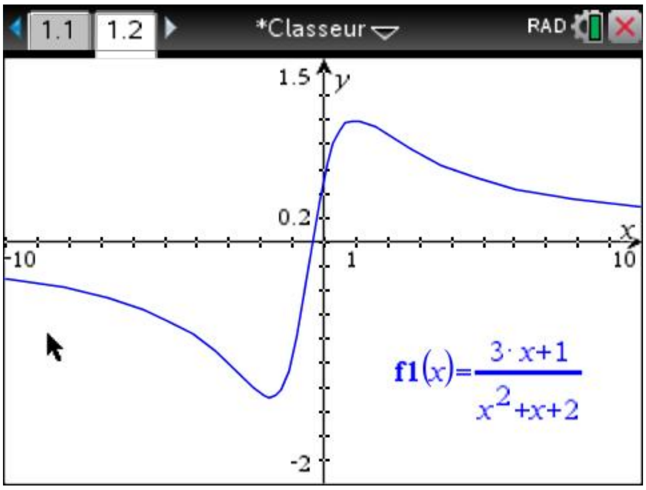


Dans les questions 2 et 3, on considère La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x+2}$.

2) On note h' la fonction dérivée de h, on a :



3) La fonction h est :



4) Une zone de reforestation a été replantée de 75 % de chênes et de 25 % de charmes. On sait que 22 % des chênes et 9 % des charmes plantés sont morts la première année. Après la première année, la part des chênes encore vivants parmi les arbres encore vivants dans cette zone de reforestation est égale à :

c. 72 car $72 = \dfrac{75 - \dfrac{22}{100} \times 75}{100 - \left(\dfrac{22}{100} \times 75 + \dfrac{9}{100} \times 25\right)}$

5) Deux baisses successives de 50 % peuvent être compensées par :
On doit donc résoudre l'équation sur les coefficients multiplicateurs (H la hausse) : $0,5 \times 0,5 \times H = 1$ qui nous donne $H = 4 = 1 + 3 = 1 + \dfrac{300}{100}$; c'est à dire une hausse de 300%